

Сопряженные задачи для уравнения диффузии

Лектор: д.ф.-м.н., профессор
Темирбеков Н.М.

Пусть в вещественном гильбертовом пространстве $H = L_2(0,1)$ рассматривается оператор $A(v)$:

$$A(v) = -\frac{d}{dx}v\frac{d}{dx}, \quad (6.1)$$

действующий на функции $v(x)$ определенные на $\Omega = (0,1)$ и принадлежащие множеству $D(A) \subset H$. Будем предполагать, что функции $v \in D(A)$ достаточно гладкие, так что

$$A(v)v = -\frac{d}{dx}v\frac{d}{dx} \in H, \quad (6.2)$$

$$\frac{dv}{dx} = 0, \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = 0, \text{ при } x = 1, \quad (6.3)$$

$$(A(v)v, \omega) = - \int_0^1 \omega \frac{d}{dx} v \frac{d}{dx} dx. \quad (6.4)$$

$$(A(v)v, \omega) = -\omega v \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 v \frac{d\omega}{dx} \frac{dv}{dx} dx. \quad (6.5)$$

$$(A(v)v, \omega) = \int_0^1 \frac{dv}{dx} \left(v \frac{d\omega}{dx} \right) dx. \quad (6.6)$$

$$(A(v)v, \omega) = v \left(v \frac{d\omega}{dx} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 v \frac{d}{dx} v \frac{d\omega}{dx} dx. \quad (6.7)$$

Теперь введем в рассмотрение множество функций $D(A^*) \subset H$. Будем предполагать, что функции $\omega \in D(A^*)$ достаточно гладкие, так что оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)v \left(\frac{d}{dx}\right)$ на ω имеет смысл, и

$$\frac{d}{dx} v \frac{d\omega}{dx} \in H, v \in D(A), \omega \in D(A^*).$$

функции $\omega \in D(A^*)$ на границе области $\Omega = (0,1)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{d\omega}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dx} = 0 \text{ при } x = 1, \quad (6.8)$$

когда $\omega \in D(A^*)$, внеинтегральный член в формуле (6.7) обратится в нуль, мы имеем

$$(A(v)v, \omega) = - \int_0^1 v \frac{d}{dx} v \frac{d\omega}{dx} dx. \quad (6.9)$$

$$A^*(v) = - \frac{d}{dx} v \frac{d}{dx}. \quad (6.10)$$

$$(A(v)v, \omega) = (v, A^*(v)\omega), v \in D(A), \omega \in D(A^*), \quad (6.11)$$

$$J_p[\varphi] = (p, \varphi),$$

$$-\frac{d}{dx} \varphi \frac{d\varphi}{dx} = f(x),$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, \quad (6.12)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ при } x = 1,$$

где $f(x)$ - заданная функция из H .

$$J_p[\varphi] = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx, p \in H. \quad (6.13)$$

$$-\frac{d}{dx} \varphi \frac{d\varphi^*}{dx} = p(x),$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, \quad (6.14)$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 1,$$

Получим теперь представление функционала $J_p[\varphi]$ через решение сопряженной задачи (6.14). Умножим уравнение (6.12) на φ^* , а уравнение (6.14) на φ , проинтегрируем результаты по x на $(0,1)$ и результаты вычтем один из другого. Тогда

$$-\int_0^1 \varphi^* \frac{d}{dx} \varphi \frac{d\varphi}{dx} dx + \int_0^1 \varphi \frac{d}{dx} \varphi \frac{d\varphi^*}{dx} dx = \int_0^1 f(x) \varphi^* dx - \int_0^1 p(x) \varphi dx.$$

$$\int_0^1 f(x) \varphi^* dx = \int_0^1 p(x) \varphi dx. \quad (6.15)$$

$$J_p = \int_0^1 p(x) \varphi dx, \quad J_p = \int_0^1 f(x) \varphi^* dx.$$

$$J_p = \int_0^1 p(\varphi, x) \varphi dx, \quad J_p = \int_0^1 f(x) \varphi^* dx. \quad (6.16)$$

$$p(\varphi, x) = \varphi,$$

$$J_p = \int_0^1 \varphi^2 dx, \quad (6.17)$$

$$J_p = \int_0^1 f \varphi^* dx.$$

Пример. Пусть $f(x) = \cos 2\pi x$, тогда основная задача (6.12) имеет вид

$$-\frac{d}{dx} \varphi \frac{d\varphi}{dx} = \cos 2\pi x, x \in (0,1),$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

решение $\varphi = \left(\frac{1}{\pi}\right) \cos \pi x$.

$$J_p = \int_0^1 \varphi^2 dx = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \cos^2 \pi x dx = \frac{1}{2\pi^2}.$$

рассмотреть сопряженную задачу (6.14) при $p = \varphi = (\frac{1}{\pi})\cos\pi x$:

$$-\frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \cos\pi x \frac{d\varphi^*}{dx} = \frac{1}{\pi} \cos\pi x, x \in (0,1),$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

Нетрудно видеть, что данная задача имеет решение из $L_2(0,1)$

$$\varphi^* = \frac{1}{\pi^2} \ln|\cos\pi x|, x \neq 1/2,$$

$$J_p = \int_0^1 f(x)\varphi^*(x)dx = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \cos 2\pi x \ln|\cos\pi x| dx.$$

$$J_p = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{1/2} \cos 2\pi x \ln(\cos \pi x) dx = \frac{1}{2\pi^2};$$

это совпадает со значением $J_p = \int_0^1 \varphi^2 dx$.

задачу возмущенную:

$$-\frac{d}{dx} \varphi' \frac{d\varphi'}{dx} = f'(x),$$

$$\frac{d\varphi'}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, \quad (6.18)$$

$$\frac{d\varphi'}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$\varphi' = \varphi + \delta\varphi, \quad f' = f + \delta f, \quad (6.19)$$

$$-\frac{d}{dx}\varphi \frac{d\varphi^*}{dx} = p(x),$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, \quad (6.18)$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$-\int_0^1 \varphi^* \frac{d}{dx}(\varphi +$$

Рассмотрим конкретный пример. Пусть $f(x) = \cos 2\pi x$. Тогда, как мы видели выше, основная задача (6.12) имеет решение $\varphi(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right) \cos \pi x$. Будем рассматривать функционал (6.13), где $p(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right) \cos \pi x$. В данном случае $J_p = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx = 1/2\pi^2$.

В качестве $f'(x)$ возьмем функцию

$$f'(x) = f(x) + \delta f(x),$$

Где $\delta f(x) = \varepsilon p \cos \pi x$, $\varepsilon = \text{const} > 0$. Тогда возмущенная задача (6.18) примет вид

$$-\frac{d}{dx} \varphi' \frac{d\varphi'}{dx} = \cos 2\pi x + \varepsilon p \cos \pi x, \quad x \in (0,1),$$

$$\frac{d\varphi'}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi'}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$J'_p = J_p + \delta J_p,$$

где δJ_p определяется по формуле (6.26). Для отыскания δJ_p из (6.26) нам требуется знать решение φ^* сопряженной задачи (6.20), которая в данном случае имеет вид

$$-\frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \cos \pi x \frac{d\varphi^*}{dx} = \frac{1}{\pi} \cos \pi x, \quad x \in (0,1),$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\pi^2} \ln |\cos \pi x|, \quad x \neq 1/2,$$

Кроме того, в формулу (6.26) для δJ_p входит величина $\delta\varphi = \varphi' - \varphi$. Как правило, найти ее в явном виде довольно трудно, но в данном примере это несложно. Возмущенная задача имеет решение $\varphi' = \left(\frac{1}{\pi}\right) \cos\pi x + \varepsilon$, поэтому $\delta\varphi = \varphi' - \varphi = \varepsilon$

Отсюда и из (6.26) имеем

$$\delta J_p = \int_0^1 \varepsilon \cos\pi x \cdot \frac{1}{\pi^2} \ln|\cos\pi x| dx - \int_0^1 \varepsilon (-\sin\pi x) \left(\frac{1}{\pi^2} \frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}\right) dx = \frac{\varepsilon}{\pi} \left\{ \int_0^1 \cos\pi x \ln|\cos\pi x| dx - \int_0^1 \frac{\sin^2\pi x}{\cos\pi x} dx \right\}$$

Интегрированием по частям легко получаем, что

$$\int_0^1 \cos\pi x \ln|\cos\pi x| dx = \int_0^1 \frac{\sin^2\pi x}{\cos\pi x} dx,$$

т.е.

$$\delta J_p \equiv 0.$$

Таким образом, независимо от величины параметра ε значение функционала J_p при переходе от основной задачи к возмущенной не меняется.

Этот же результат в данном случае мы могли бы получить сразу, используя другое представление для δJ_p :

$$\delta J_p = \int_0^1 p \delta \varphi dx = \int_0^1 \frac{1}{\pi} \cos \pi x \cdot \varepsilon dx \equiv 0.$$

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.